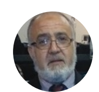
5. Dipôle électrostratique

Dataset · March 2016

1 author:



Mohamed Akbi
University M'Hamed Bougara of Boumerdes

5. Dipôle électrostatique

Exercice 18 *** — Mouvement oscillatoire d'un dipôle dans le champ d'un anneau chargé

On considère un anneau métallique de centre O et de rayon *R* portant une charge *Q* répartie uniformément avec la densité linéique λ (Fig. E18).

1. **Déterminer le potentiel électrostatique en un point *M* de l'axe *Oz*.**
2. **En déduire le champ électrostatique au point *M*.**
3. **Tracer l'allure de *V*(*z*) et *E*(*z*).**

On place au point *M*(*0,0,z*) un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = q\,d\,\vec{k}$ et de masse *m*, qui se déplace le long de l'axe *Oz*. Ce dipôle est constitué de deux charges (*−q,+q*), dont le centre est en *M* et dont la distance *d* est faible devant la distance *z*.

4. **Quelles sont les forces qui sont appliquées au dipôle?**
5. **Déterminer les positions d'équilibre du dipôle et quelle serait la nature de cet équilibre?**

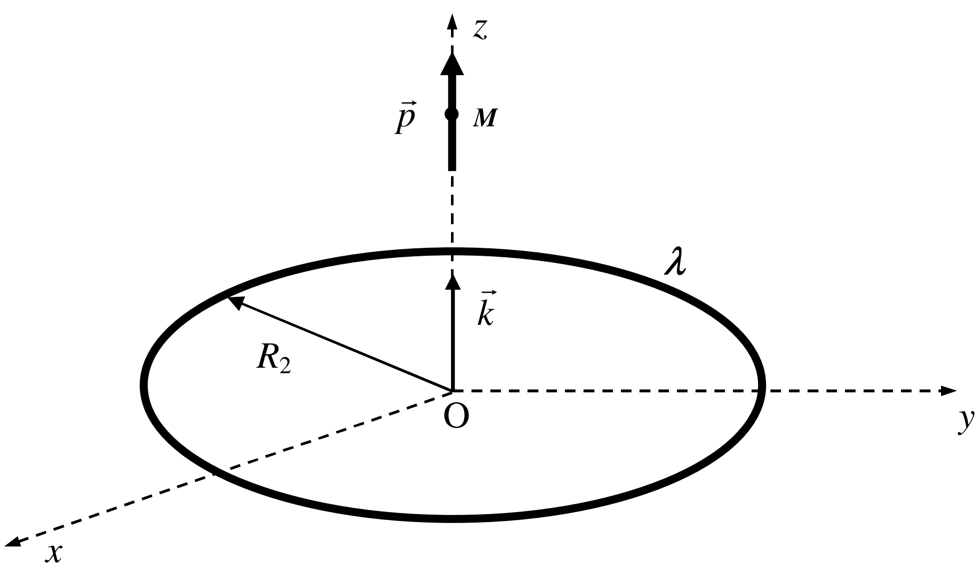


Fig. E18

6. Soit z_e la position d'équilibre stable du dipôle. A l'instant t = 0, on écarte ce dipôle d'une distance Δz_0 très faible devant z_e ($\Delta z_0 << z_e$). Déterminer la pulsation des oscillations qui en résultent.

Solution :

1. Ce calcul a été réalisé dans l'exercice 11. Le résultat obtenu est :

$$\boxed{V_M(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}}$$

2. Le champ électrostatique dérive d'un potentiel, tel que : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Le long de l'axe Oz, le potentiel est une fonction de z seulement. Par conséquent :

$$\vec{E} = E(z)\vec{k} = -\frac{dV}{dz}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}}$$

3. Les graphes de $V(z)$ et $E(z)$ sont représentés sur la figure E18.1.

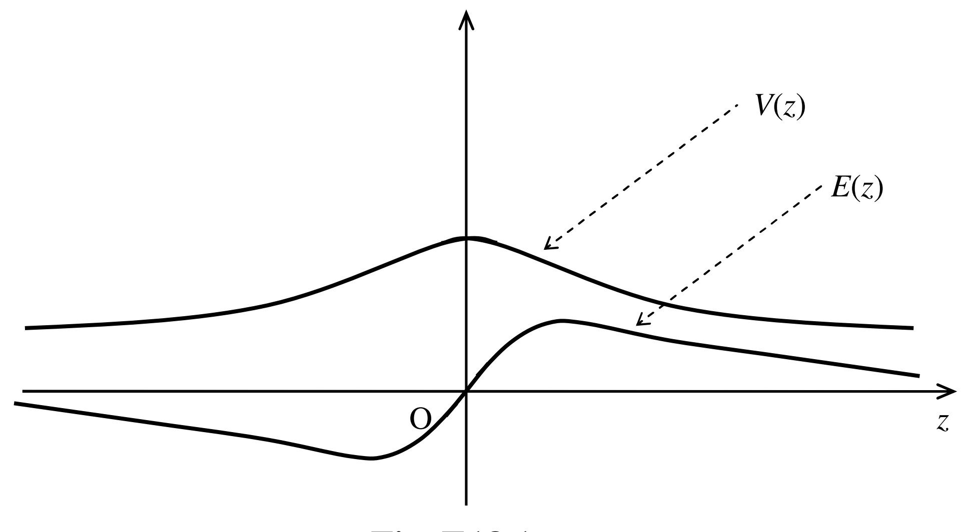


Fig. E18.1

4. Le dipôle est placé dans le champ électrique $\vec{E}$ créé par l'anneau chargé. Le champ $\vec{E}$ n'étant pas uniforme, son action se traduit par:

– un couple de moment:

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{p}\wedge\vec{E}\right| = p\,E\,\sin 0 = 0 \quad (\ \vec{p} \text{ et } \vec{E} \text{ sont colinéaires });$$

– une force résultante :

$$\vec{F} = q\vec{E}(z+d) - q\vec{E}(z) = q\left[E(z+d) - E(z)\right]\vec{k} = q\,d\,\frac{dE}{dz}\vec{k}$$

où $\vec{E} = \dfrac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \dfrac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{k}$ et $d \ll z$.

On obtient : $\boxed{\vec{F} = qd \dfrac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \dfrac{R^2 - 2z^2}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{5}{2}}} \vec{k}}$

■ En général, on utilise l'expression :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p = \overrightarrow{grad}\left(\vec{p} \cdot \vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(p \cdot E\right) = p \frac{dE}{dz} \vec{k}$$

5. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la force résultante soit nulle :

$$\vec{F} = qd \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{R^2 - 2z^2}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{5}{2}}} \vec{k} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad R^2 - 2z^2 = 0$$

D'où : $\boxed{z = \pm \dfrac{R}{\sqrt{2}}}$

Il y a donc deux positions d'équilibre : $z_1 = +\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ et $z_2 = -\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

– La position d'**équilibre stable** correspond à $z_1 = +\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

- $\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires et de même sens;
- $E_p(z_1) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(z_1) = -p\,E(z_1)$ (l'**énergie potentielle** $E_p(z_1)$ du dipôle est **minimale**).

– La position d'**équilibre instable** correspond à $z_1 = -\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

- $\vec{F} = \vec{0}$; $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires mais de sens contraires;
- $E_p(z_2) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(z_2) = +p\,E(z_2)$ (l'**énergie potentielle** $E_p(z_2)$ du dipôle est **maximale**).

6. On applique la relation fondamentale de la dynamique au dipôle en mouvement. Le poids du dipôle est négligeable devant la force électrostatique $\vec{F}(z_e + \Delta z)$.

On obtient alors:

$$F\left(z_e+\Delta z\right)=m\,\frac{d^2\left(z_e+\Delta z\right)}{dt^2}=m\,\frac{d^2 z_e}{dt^2}+m\,\frac{d^2\left(\Delta z\right)}{dt^2}=m\,\frac{d^2\left(\Delta z\right)}{dt^2}$$

La force électrostatique s'exprime, d'après (4), avec $z_e=+\dfrac{R}{\sqrt{2}}$:

$$\vec{F}=qd\,\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{R^2-2\left(z_e+\Delta z\right)^2}{\left(\left(z_e+\Delta z\right)^2+R^2\right)^{\frac{5}{2}}}\vec{k}=qd\,\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{R^2-2\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{R}\Delta z\right)^2}{\left[\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{R}\Delta z\right)^2+R^2\right]^{\frac{5}{2}}}\vec{k}$$

Soit:

$$\vec{F}=qd\,\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{R^2-2\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1+2\dfrac{\sqrt{2}}{R}\Delta z\right)}{\left[\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1+2\dfrac{\sqrt{2}}{R}\Delta z\right)+R^2\right]^{\frac{5}{2}}}\vec{k}=qd\,\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{-2\sqrt{2}\,R\,\Delta z}{\left(3\dfrac{R^2}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}\vec{k}$$

$$=qd\,\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{-2\sqrt{2}\,R}{\left(3\dfrac{R^2}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}\Delta z\;\vec{k}=-qd\,\frac{\lambda}{\varepsilon_0}\frac{8}{9\sqrt{3}R^3}\Delta z\;\vec{k}$$

Le dipôle étant légèrement écarté de O ($\Delta z \ll z_e$), l'équation du mouvement devient:

$$m\,\frac{d^2\left(\Delta z\right)}{dt^2}=-qd\,\frac{\lambda}{\varepsilon_0}\frac{8}{9\sqrt{3}R^3}\cdot\left(\Delta z\right)$$

Finalement, on a:

$$\frac{d^2\left(\Delta z\right)}{dt^2}+qd\,\frac{\lambda}{\varepsilon_0 m}\frac{8}{9\sqrt{3}R^3}\cdot\left(\Delta z\right)=0$$

C'est l'équation caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω et de période $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Cette équation est de la forme:

$$\frac{d^2\left(\Delta z\right)}{dt^2}+\omega^2\cdot\left(\Delta z\right)=0$$

Où:

$$\boxed{\omega=\frac{2}{3R}\sqrt{\frac{2q\,d\,\lambda}{\sqrt{3}\,R\,\varepsilon_0\,m}}}$$

Donc, la période T est donnée par:

$$\boxed{T=3\pi R\sqrt{\frac{\sqrt{3}R\,\varepsilon_0 m}{2q\,d\,\lambda}}}$$

On peut exprimer la période en fonction du moment dipolaire p et de la charge totale Q de

l'anneau ($p = q\,d$ et $Q = 2\pi R\,\lambda$). On obtient :

$$\boxed{T = 3\pi R^2 \sqrt{\frac{\sqrt{3}\,\pi\,\varepsilon_0 m}{p\,Q}}}$$

Vérification de la formule

On utilise l'équation aux dimensions:

$$[T] = [3\pi]\left[R^2\right]\sqrt{\frac{\left[\sqrt{3}\,\pi\right][\varepsilon_0][m]}{[p][Q]}}$$

En utilisant:

$$[Q] = I\cdot T^{-1};\ \ [\varepsilon_0] = M^{-1}\cdot L^{-1}\cdot T^{2}\cdot [Q]^2\cdot L^{-2} = M^{-1}\cdot L^{-1}\cdot T^{2}\cdot I^{2}\cdot T^{-2}\cdot L^{-2}$$

On obtient :

$$T = L^2\cdot\left(M^{-1}\cdot L^{-1}\cdot T^{2}\cdot I^{2}\cdot T^{2}\cdot L^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot (M)^{\frac{1}{2}}\cdot (I\cdot T\cdot L)^{-\frac{1}{2}}\cdot I^{-\frac{1}{2}}\cdot T^{-\frac{1}{2}} = T$$

Cette équation est homogène à un temps. Elle est donc satisfaisante.

Exercice 19 *** — Stabilité d'un dipôle dans le champ d'un fil rectiligne infini uniformément chargé.

1. Soit un filament rectiligne infiniment long, portant une charge λ par unité de longueur (Fig. E19). En effectuant un calcul direct, montrer que le champ électrostatique créé par cette distribution de charges en un point M est donné par:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

2. On place un dipôle au point M, distant de r du fil, et son moment dipolaire $\vec{p}$ fait un angle α avec la direction du fil (Fig. E19).

2.1. Calculer la force exercée sur le dipôle.

2.2. Calculer le moment du couple agissant sur le dipôle.

3. Calculer l'énergie potentielle électrostatique du dipôle en interaction avec le champ créé par le fil chargé.

4. Déterminer les positions stables du dipôle lorsqu'il est maintenu à une distance fixe.

5. Après avoir pris l'orientation $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le dipôle se déplace de la distance r à $\frac{r}{2}$. Calculer la variation de l'énergie cinétique du dipôle.

Solution :

1. En utilisant les résultats de l'exercice 7, on obtient:

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

2. Le dipôle est placé dans un champ électrique non uniforme (inversement proportionnel à *r*). Il est soumis à une force électrostatique donnée par:

$$\vec{F} = \left(\vec{p}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{E}(M)$$

En coordonnées cylindriques, l'expression de la force $\vec{F}$ s'écrit:

$$\vec{F} = \left[\left(p_r\,\vec{u}_r + p_\theta\,\vec{u}_\theta + p_z\,\vec{u}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right)\right]E(r)\,\vec{u}_r$$

Soit : $$\vec{F} = \left[p_r\frac{\partial}{\partial r}\right]E(r)\,\vec{u}_r$$

En remplaçant le champ $\vec{E}(r)$ par son expression, on obtient:

$$\vec{F} = \left[p_r\frac{\partial}{\partial r}\right]\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{u}_r = -\frac{p_r\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Comme le dipôle et le fil sont dans un même plan, on a :

$$\vec{p} = p_r\,\vec{u}_r + p_z\,\vec{u}_z$$

avec $p_r = p\sin\alpha$ et $p_z = p\cos\alpha$

On obtient finalement :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha\;\vec{u}_r}$$

3. Le moment $\vec{L}$ du couple appliqué au dipôle est donné par :

$$\vec{L} = \vec{p}\wedge\vec{E} \quad\Rightarrow\quad \vec{L} = \left(p_r\,\vec{u}_r + p_z\,\vec{u}_z\right)\wedge E(r)\,\vec{u}_r$$

Soit : $$\vec{L} = p_z E(r)\,\vec{u}_z\wedge\vec{u}_r = p_z E(r)\,\vec{u}_\theta$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{L} = \frac{p\,\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\alpha\;\vec{u}_\theta}$$

– L'énergie potentielle du dipôle est donnée par :

$$E_p(M) = -\vec{p}\cdot\vec{E}(M) = -\left(p_r\,\vec{u}_r + p_z\,\vec{u}_z\right)\cdot E(r)\,\vec{u}_r = -p_r\,E(r)$$

Soit : $E_p(M) = E_p(r,\alpha) = -\dfrac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\alpha$

$$\boxed{E_p(r,\alpha) = -p\,E(r)\sin\alpha}$$

4. Puisque le dipôle est maintenu à une distance *r* fixe, alors l'énergie potentielle ne dépend que de la variable α.

Les deux positions d'équilibre du dipôle correspondent aux extremums de l'énergie potentielle, c'est-à-dire à:

$$\frac{dE_p}{d\alpha} = 0 \;\Rightarrow\; \cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow\; \alpha_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$$

– La position d'**équilibre stable** correspond à $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}$

- L'**énergie potentielle** y est **minimale**,

$$\left(\text{en effet } \left.\frac{d^2E_p}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = p\,E\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = p\,E > 0\right).$$

– La position d'**équilibre instable** correspond à $\alpha_2 = \dfrac{3\pi}{2}$

- L'**énergie potentielle** y est **maximale**,

$$\left(\text{en effet } \left.\frac{d^2E_p}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\frac{3\pi}{2}} = p\,E\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\,p\,E < 0\right).$$

5. La variation de l'énergie cinétique du dipôle est égale au travail de la force électrostatique:

$$\Delta E_c = E_{c\,finale} - E_{c\,initiale} = W = \int_r^{\frac{r}{2}} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}$$

Soit :

$$\Delta E_c = \int_r^{\frac{r}{2}} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_r^{\frac{r}{2}} -\frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha\;\vec{u}_r\cdot dr\,\vec{u}_r$$

$$= -\frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\sin\alpha\int_r^{\frac{r}{2}}\frac{dr}{r^2} = -\frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\sin\alpha\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\frac{r}{2}} = \frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\sin\alpha\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{r}\right]$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\Delta E_c = \frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\alpha}$$

Exercice 20 *** — Force exercée sur un dipôle placé dans un champ électrique non uniforme

On considère un dipôle électrostatique, formé de deux charges ponctuelles + q et − q, séparées par une distance a. On place ce dipôle à une distance $r >> a$ d'une charge ponctuelle Q. Le dipôle est aligné avec le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par Q.
Déterminer la résultante des forces électrostatiques exercées sur le dipôle.

Solution :

1. La force exercée sur le dipôle est (Fig. E20) :

$$\vec{F} = q\vec{E}\left(\vec{r}+\vec{a}\right) - q\vec{E}\left(\vec{r}\right)$$

Où $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

$\vec{E}$ est le champ électrique créé par la charge Q; il varie en $\frac{1}{r^2}$.

D'où :

$$\vec{F} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(r+a)^2} - \frac{1}{r^2}\right)\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{a}{r}\right)^2} - 1\right]\vec{u}_r$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\left[\left(1+\frac{a}{r}\right)^{-2} - 1\right]\vec{u}_r$$

Fig. E20

Utilisons le développement en série :

$$(1 \pm \varepsilon)^n = 1 \pm n\,\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}\varepsilon^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}\varepsilon^3 + \cdots$$

Pour $n = -2$, ce développement devient:

$$(1+\varepsilon)^{-2} = 1 - 2\,\varepsilon + 3\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \cdots$$

En négligeant les termes d'ordre 2 et plus, on obtient :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\left[\left(1 - 2\frac{a}{r}\right) - 1\right]\vec{u}_r$$

Soit : $$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qQ\,a}{r^3}\vec{u}_r}$$

La force $\vec{F}$ peut s'exprimer en fonction du moment dipolaire $\vec{p} = q\,a\;\vec{u}_r$:

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q\,p}{r^3}\vec{u}_r}$$